

Vergleich zwischen gemessenen und berechneten Emittanz-Diagrammen von Elektronenkanonen

Rolf Lauer

Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt Braunschweig

(Z. Naturforsch. **29 a**, 1291–1298 [1974]; eingegangen am 31. Mai 1974)

Comparison of Measured and Computed Emittance Diagrams of Electron Guns

Emittance diagrams of electron guns were measured by means of a shadow method and compared with computed diagrams given in the literature. The calculated ray characteristics and particularly the paraxial ray data could be confirmed, but not the data for the spherical aberration constant. The experimental diagrams can be described by a fifth order parametric expansion of ray inclination and ray coordinate as a function of the ray inclination at the cathode. This expansion is compatible with an electron gun model consisting of two subsequent electrostatic lenses having third order aberrations only. A short survey on this article is given in ¹¹.

1. Einleitung

In einer kürzlich erschienenen Arbeit¹ – im folgenden I genannt – wurden mit Hilfe des Schattenverfahrens^{2, 3} die Achsenabstände x_p und die Neigungen $\tan \alpha' = dx/dz$ der Elektronenbahnen in der Brennfleckebene einer Elektronenkanone untersucht. In den zu behandelnden Fällen gilt stets $\alpha' \ll \pi/2$; daher kann α' proportional zur Impulskomponente p_x gesetzt werden. Unter diesen Umständen sind die Schattenkurven (s. Abb. 2 a) bis auf eine in Abb. 5 von I beschriebene Scherung identisch mit sogenannten Emittanz-Diagrammen, in denen die Gesamtheit der Wertepaare $(x; p_x)$ als Fläche im zweidimensionalen Phasenraum dargestellt wird.

Emittanz-Diagramme dienen in der Hochenergiephysik zur Bemessung von Strahlführungssystemen, da ihr Flächeninhalt aufgrund des Liouvilleschen Theorems konstant bleibt. Sie nehmen eine S-förmige Gestalt an, wenn das untersuchte Strahlenbündel durch Abbildungsfehler von mindestens dritter Ordnung beeinflußt wurde, vgl.⁴, dort Abb. 2.3.

In I wurde ein Verfahren angegeben, aus der Gestalt der Emittanz-Diagramme folgende Fehlerkonstanten von Elektronenkanonen zu bestimmen:

1. die auf die Abbildung Eintrittspupille-Brennfleck bezogene Öffnungsfehlerkonstante

$$C_0 = \frac{\Delta x_p}{M_q' \alpha^3} \quad (1)$$

dritter Ordnung und

Sonderdruckanforderungen an Dr. R. Lauer, Physikalisch-Technische Bundesanstalt, D-3300 Braunschweig, Bundesallee 100.

2. den Koeffizienten der Winkelaberration

$$c_a = \frac{\alpha - \alpha' M_q' V W_A / W_K}{\alpha^3} \quad \text{bzw.} \quad (2 \text{ a})$$

$$c_a^0 = \frac{\sin \alpha - \sin \alpha' M_q' V W_A / W_K}{\sin^3 \alpha} \quad (2 \text{ b})^*$$

dritter Ordnung; die Bedeutung der Formelzeichen geht aus Abb. 1 hervor.

Das Verfahren ist nur anwendbar, solange die Queraberration Δx_p in dritter Potenz vom Austrittswinkel α' abhängt. Leider sind nach I in diesem Bereich die Δx_p -Werte oft zu klein, um eine Auswertung der experimentellen Diagramme zuzulassen.

Wir werden im folgenden zeigen, daß die Gestalt der Emittanz-Kurven anhand eines einfachen Modells für den Strahlengang in der Elektronenkanone interpretiert werden kann. In diesem Modell ergeben sich die Queraberration Δx_p und der Austrittswinkel α' als Potenzreihenentwicklungen nach dem Eintrittswinkel α und die interessierenden Fehlerkonstanten (1) und (2) können auf die Entwicklungskoeffizienten dieser Reihen zurückgeführt werden. Die Fehlerkonstanten werden also aus dem gesamten Verlauf der Emittanz-Kurven ermittelt; damit entfallen die oben genannten Einschränkungen.

Worster⁶ hat auf dem Wege digitaler Strahldurchrechnung ohne Berücksichtigung der Raumladung $(\alpha'; x_p)$ -Diagramme von zwei Elektronenkanonen bestimmt und diese (allerdings nur bezüglich der Öffnungsfehlerkonstanten C_0) ausgewertet.

* Die genauere Gl. (2 b) leitet sich aus Gl. (5) in l. c.⁵ ab. Hierbei ist c_a^0 wegen des Immersionsfaktors nicht durch Gl. (10) in l. c.⁵, sondern durch Gl. (4 a) in I definiert.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht:
Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Wir haben die Emittanz-Diagramme derselben Elektronenkanonen experimentell gemessen. Die Meßergebnisse werden im folgenden mit Worsters Rechenergebnissen verglichen und dann anhand des aufgestellten Modells interpretiert.

2. Experimentelles Vorgehen

Die der Berechnung in l. c.⁶ zugrunde liegenden Elektrodenkonfigurationen wurden maßstäblich nachgebaut, vgl. Abbildung 2 a. Die zylinderförmige Kathode mit halbkugelförmiger Emissionsfläche wurde in Form eines an eine Haarnadelkathode angepunkteten und durch Elektronenbeschuß verrundenen⁷ Wolframdrahtes realisiert.

Durch die Kathodenheizung ändert sich die Lage des Kathodenpols beträchtlich⁸ und weicht beim Experimentieren erheblich von dem im kalten Zustand eingestellten Wert ab. Um die zur Adaption der Meßwerte an die Rechenwerte geeignete Lage der Kathodenkugel zu finden, wurden mit den von Worster angegebenen Verhältnissen Wehnelt- zu Anodenspannung bei zahlreichen Kathodenlagen Schattenkurven aufgenommen. Hieron wurden die Kurven für die endgültige Auswertung herangezogen, welche dieselben relativen Maximalwerte α'_{\max} der Strahlneigung wie die $(\alpha'; x_p)$ -Diagramme in Abb. 10 und 11 von l. c.⁶ besaßen, vgl. auch Abb. 2 b dieses Aufsatzes.

Um den Anschluß an unsere früheren Versuche zu gewinnen, wurde die von Worster angenommene Anodenspannung von 50 kV auf 10 kV erniedrigt. Diese Maßnahme hat nach den elektronenoptischen Ähnlichkeitgesetzen nur dann keinen Einfluß auf den Strahlverlauf, wenn die Wehnelt-Spannung und die Emissionsenergie der Elektronen im gleichen Verhältnis reduziert werden. Die erforderliche Reduktion der Emissionsenergie überschreitet aber bei Glühemission weit das mögliche Maß. Deshalb wurde in unserem Experiment die in l. c.⁶ angegebene Kathodentemperatur beibehalten. Eine Verletzung der Ähnlichkeitgesetze wurde also in Kauf genommen. Ihre Auswirkung auf den Strahlengang wurde auf Grund folgender Überlegungen eliminiert:

Wir denken uns das kathodennahe elektrische Feld ins Kathodeninnere hinein fortgesetzt und suchen diejenige Äquipotentialfläche („Ersatzkathode“) auf, an der die Elektronen den verlangten Bruchteil der wahrscheinlichsten Emissionsenergie kT annehmen. Nach Abb. 1 b schmiegt sich diese Ersatzkathode mit $r_e \rightarrow r_K$ konzentrisch der realen Kathode an, weil die Differenz zwischen Wehnelt- und Wehnelt-Sperrpotential ($U_W - U_{W\text{sperr}}$) ≈ 100 V viel größer als die Potentialdifferenz $\Delta U_K = (1 - 1/5)kT/e$

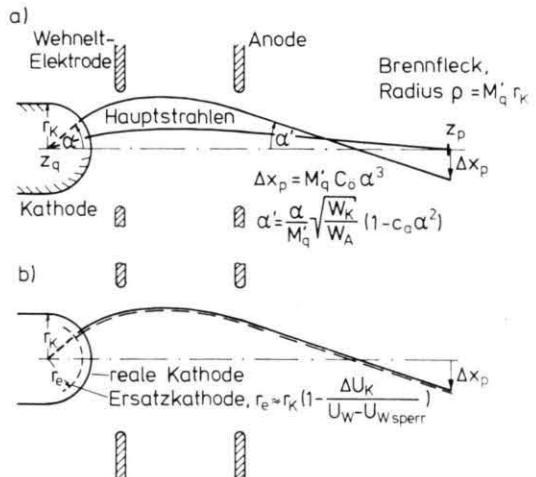


Abb. 1. Kennzeichnung des Strahlverlaufs in Elektronenkanonen.

- a) Bestimmungsstücke für C_0 und c_a . Die Öffnungsfehlerkonstante C_0 und der Koeffizient c_a der Winkelabberation sind nach Gl. (4 a) aus I über den Komakoeffizienten F_r miteinander verknüpft. Mit C_0 und c_a ist daher auch F_r bestimmt ($W_K = kT$ = wahrscheinlichste Emissionsenergie der Elektronen, W_A = Elektronenenergie im Brennfleck).
- b) Konstruktion der „Ersatzkathode“. Hauptstrahlen, die von der realen Kathode (—) und von der Ersatzkathode (---) ausgehen, haben denselben Verlauf.

$= 0,21$ V zwischen der realen und der Ersatzkathode ist. Normaltrajektorien der realen Kathode sind dann auch Normaltrajektorien der Ersatzkathode, und die Bahnneigungen α und α' sowie die Querabberationen Δx_p der Hauptstrahlen aller Elementarbündel sind dann praktisch unabhängig vom Verhältnis Emissionsenergie zu Wehnelt- und Anodenspannung. Eine rechnerische Korrektur dieser Größen ist also nicht notwendig.

Anders liegen die Verhältnisse für den Abbildungsmaßstab M_q' , der gemäß

$$\varrho(kT) = |M_q'| r_K; \quad (r_K = \text{Kathodenradius}) \quad (3)$$

den Brennfleckradius $\varrho(kT)$ bestimmt *. Mit Hilfe des Lagrange-Helmholzschen Satzes kann M_q' durch die Winkel α und α' sowie durch das Verhältnis Emissions- zu Endenergie $e(U_A - U_0)$ der Elektronen ausgedrückt werden:

$$M_q' = \frac{\alpha}{\alpha'} \sqrt{\frac{kT}{e(U_A - U_0)}}; \quad (U_A - U_0 = \text{Anodenspannung}). \quad (4)$$

* Wir wählen hier eine von Gl. (18) in I abweichende Schreibweise. Das Minuszeichen folgte dort aus dem speziellen Gang der Berechnung (negativer Abbildungsmaßstab M_q' aufgrund von Abb. 1 a, c). Da M_q' in praxi negative oder positive Werte annehmen kann, der Brennfleckradius ϱ jedoch stets als positiv definite Größe erkennbar sein soll, setzen wir oben M_q' in Betragstriche.

Tab. 1. Vergleich der gemessenen mit den von Worster⁶ berechneten Daten achsennaher Strahlen.

- Spalte 1: Maximale Strahlneigung α'_{\max} : Die Rechenwerte wurden aus den Abb. 10 und 11 von I. c.⁶ (vgl. hier Abb. 2 b) entnommen, die Meßwerte durch Variation der Kathodenlage an die Rechenwerte angepaßt, vgl. Kap. 2.
- Spalte 2: Abstand ($z_p - z_K$) zwischen Brennfleck und Kathodenpol (z -Werte in Strahlrichtung zunehmend). Die Brennfleckkoordinate z_p wurde anhand von Gl. (25) in I aus der Neigung der Schattenkurven bestimmt.
- Spalte 3: Brennfleckradius q , bestimmt nach Gl. (23) in I.
- Spalte 4: Abbildungsmaßstab $|M_q'| = q/r_K$; ($r_K = 60 \mu\text{m}$ = Krümmungsradius der Kathodenoberfläche).

		α'_{\max}	$z_p - z_K$	q	M_q'
Kegelförmige Wehnelt-Elektrode:	Meßwert:	4,4 mrad	-16,7 mm	8,4 μm	+0,136
	Rechenwert nach Worster ⁶ :	4,2 mrad	-12,1 mm	10,0 μm	+0,166
Ebene Wehnelt-Elektrode:	Meßwert:	9,9 mrad	-6,0 mm	3,9 μm	+0,065
	Rechenwert nach Worster ⁶ :	12,3 mrad	-5,1 mm	4,0 μm	+0,067

Der Abbildungsmaßstab hängt also direkt von der Anodenspannung ab, da die Emissionsenergie kT und nach den obigen Ausführungen auch die Winkel α und α' konstant sind. Zum Vergleich unserer bei 10 kV Anodenspannung gemessenen Abbildungsmaßstäbe M_q' (10 kV) mit den für 50 kV von Worster berechneten M_q' (50 kV)-Werten müssen die Meßwerte mit $(10 \text{ kV}/50 \text{ kV})^{1/2} = 0,447$ multipliziert werden. Dies wurde in Tab. 1 berücksichtigt.

sichtigung der Raumladung berechneten Diagramme erfassen diesen Einfluß nicht.

Tabelle 1 bringt einen Vergleich zwischen Rechen- und Meßdaten für die achsennahen Elektronenbahnen. Diese Daten besitzen jeweils die gleiche Größenordnung und weichen höchstens um den Faktor 1,4 voneinander ab. Diese Übereinstimmung ist als eine Bestätigung der Rechnung zu werten.

b) Die Öffnungsfehlerkonstanten

Die von Worster⁶ aus den Diagrammen der Abb. 2 b mit Hilfe der richtigen Gleichung (1) ermittelten Werte für die Öffnungsfehlerkonstante – das sind $C_{\text{öb}} = 2,5 \text{ mm}$ für die kegelförmige Wehnelt-Elektrode bzw. $C_{\text{öb}} = 0,7 \text{ mm}$ für die ebene Wehnelt-Elektrode – sind falsch. Das zeigt die Berechnung von C_{δ} nach (1) mit Hilfe zusammengehöriger Wertepaare von kathodenseitiger Strahlneigung $\alpha = 20^\circ$, den Queraberrationen $\Delta x_{\text{p,kegelf.}} = 10,5 \mu\text{m}$ bzw. $\Delta x_{\text{p,eben}} = 7,0 \mu\text{m}$ aus Abb. 2 b und den zugehörigen Abbildungsmaßstäben $M'_{\text{q,kegelf.}} = 0,167$ bzw. $M'_{\text{q,eben}} = 0,067$ aus Tabelle 1.

Die richtigen Ergebnisse sind $C_{\text{öb}} = 1,5 \text{ mm}$ anstelle von $C_{\text{öb}} = 2,5 \text{ mm}$ für die kegelförmige Wehnelt-Elektrode und $C_{\text{öb}} = 2,5 \text{ mm}$ anstelle von $C_{\text{öb}} = 0,7 \text{ mm}$ für die ebene Wehnelt-Elektrode. Nicht das System mit kegelförmiger Wehnelt-Elektrode, sondern das System mit ebener Wehnelt-Elektrode hat demnach die kleinere Öffnungsfehlerkonstante. Kleinere kathodenseitige Strahlneigungen als $\alpha = 20^\circ$ eignen sich für die Auswertung von $C_{\text{öb}}$ nicht, weil die zugehörigen Queraberrationen Δx_{p} nur ungenau aus der Zeichnung abgelesen werden können; für größere Strahlneigungen als $\alpha \approx 25^\circ$ ist der Gültigkeitsbereich der Fehlertheorie dritter Ordnung bereits überschritten.

3. Ergebnisse

a) Emittanz-Diagramme

In Abb. 2 b und c sind die von Worster⁶ berechneten und die von uns gemessenen Diagramme einander gegenübergestellt. Der generelle Verlauf von Worsters Diagrammen wird durch unsere Messung bestätigt. Lediglich für Strahlen mit den größten Queraberrationen Δx_{p} erkennt man charakteristische Abweichungen: die gemessenen Strahldiagramme sind an den Enden verdickt; d. h. sie biegen, wie besser aus Abb. 5 b von I erkennbar ist, noch einmal um. Praktisch alle** Emittanz-Diagramme weisen derartige Haken auf. Bei dieser Erscheinung kann die Raumladung möglicherweise eine Rolle spielen.

Begründung: Die Strahlen, welche die Endzipfel der Kurven aufspannen, gehen vom Rande des vom Wehnelt-Potentialvorhang freigegebenen Kathodenbereiches aus. Hier bildet sich wegen der verschwindenden Feldstärke eine starke, örtlich begrenzte Raumladung aus. Die von Worster⁶ ohne Berück-

** In wenigen Einzelfällen wurden gerade abbrechende Emittanz-Kurven registriert. In diesen Fällen wurden aber stets die vom Kathodenrandgebiet ausgehenden Strahlen durch eine zu enge Anodenbohrung von der Registrierung ausgeschlossen.

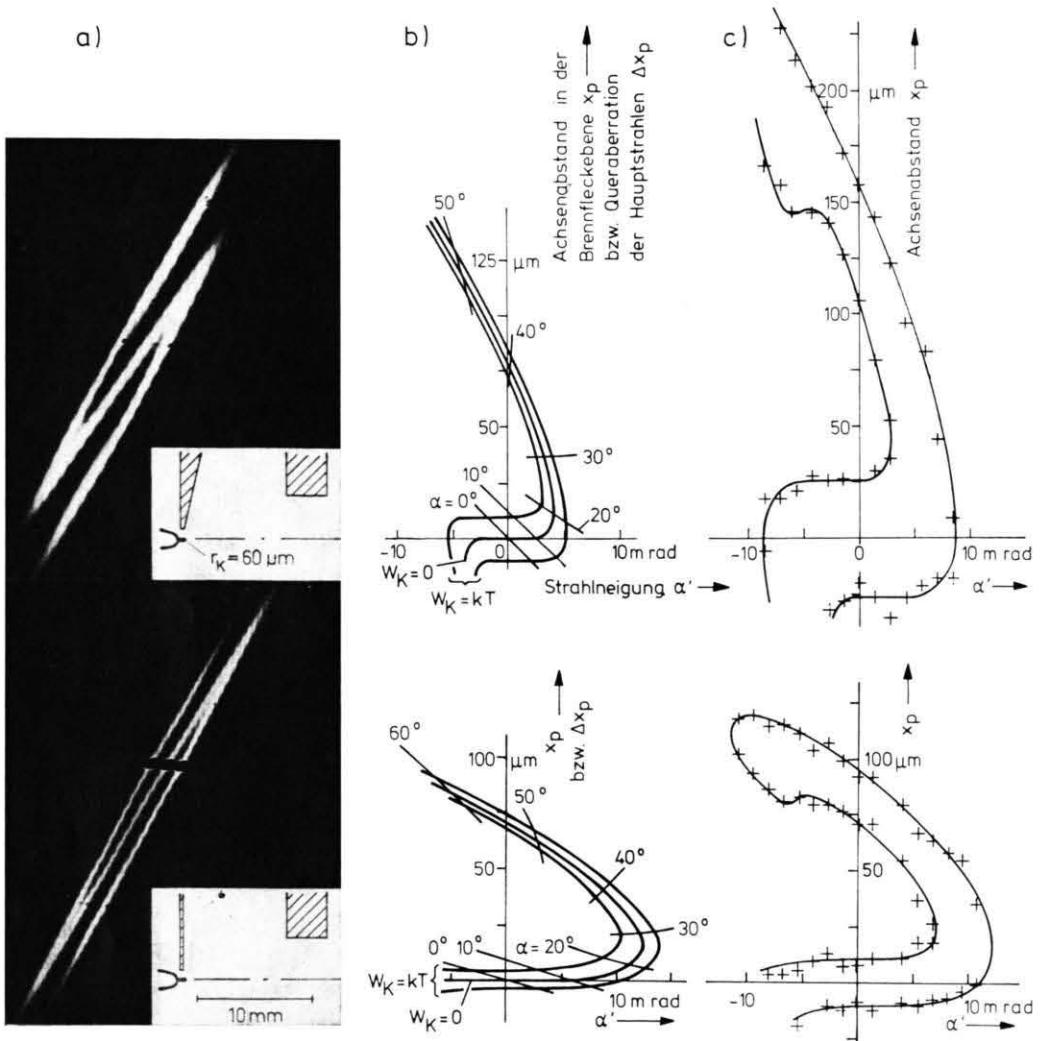


Abb. 2. Vergleich der von Worster⁶ berechneten mit den von uns vermessenen Strahldaten.

oben: System mit kegelförmiger Wehnelt-Elektrode, unten: System mit ebener Wehnelt-Elektrode.

- a) Geometrie der untersuchten Elektronenkanonen und die zugehörigen, experimentell bestimmten Strahldiagramme (Schattenkurven nach l. c.²; die Welligkeit der Schattenkurven wurde durch schwache magnetische Wechselfelder während der Aufnahme verursacht).
- b) Von Worster⁶ übernommene Rechenergebnisse für die Strahlneigungen α' und die Achsenabstände x_p in der Brennfleckebene (Emittanz-Diagramme). Elektronen, die in Normalenrichtung zur Kathode (Hauptstrahlen) oder mit verschwindender Energie $W_K \rightarrow 0$ in beliebige Richtungen emittiert werden, spannen die mit $W_K = 0$ gekennzeichnete Kurve auf. Ihre Ordinatenwerte $x_p(\alpha')$ sind identisch mit der in Abb. 1a definierten Queraberration $\Delta x_p(\alpha)$. Elektronen, die mit der wahrscheinlichsten Emissionsenergie kT in beliebige Richtungen emittiert werden, spannen den Streifen zwischen den mit $W_K = kT$ gekennzeichneten Kurven auf. Die bei $\alpha' = 0$ am Ordinatenmaßstab abgelesene Streifenbreite ist gleich dem Brennfleckdurchmesser 2ϱ .
- c) Emittanz-Diagramme in der Brennfleckebene, konstruiert nach den Angaben in der Legende von Abb. 5 in I aus den Schattenkurven von Teilbild a (visuelle Auswertung; Kurvenbreite also subjektiv festgelegt). Eine Korrektur des Brennfleckdurchmessers gemäß Kap. 2 wurde nicht durchgeführt.

c) Der Koeffizient der Winkelaberration

Trotz obiger Kritik halten wir die von Worster⁶ berechneten Diagramme in Abb. 2 b für richtig ***. Das folgt auch aus dem Vergleich mit den experi-

*** Nach dem Liouvilleschen Theorem sollten alle Flächenstücke zwischen den mit $\alpha = \text{const}$ gekennzeichneten Linien in Abb. 2 b bzw. Abb. 10 und 11 von l. c.⁶ gleich groß sein. Die Flächeninhalte in den gezeichneten Diagrammen weichen — wohl infolge geringer Zeichengenauigkeit — um bis zu $\pm 15\%$ vom Mittelwert ab.

mentell bestimmten Diagrammen von Abb. 2 c, so weit man von den besprochenen raumladungsbedingten Abweichungen absieht. Die berechneten Diagramme sind z. B. geeignet, aus der Auftragung von α' gegen α in Abb. 3 den Koeffizienten der Winkel-

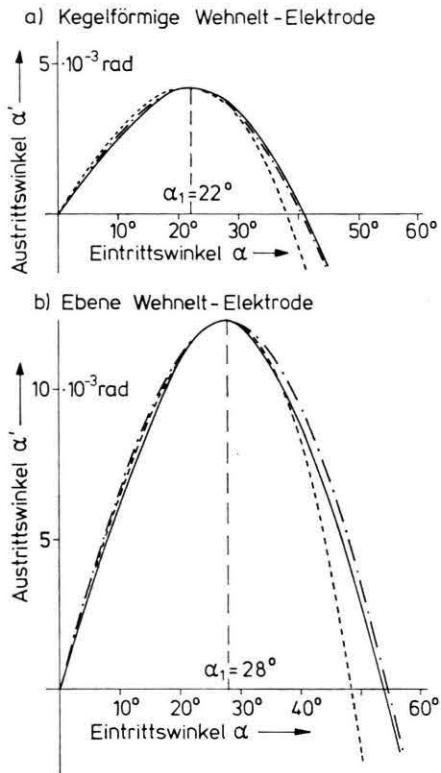


Abb. 3. Annäherung der aus Abb. 2 b zu erschließenden, hier ausgezogen (—) dargestellten Kurven $\alpha' = \alpha'(\alpha)$ durch Gl. (2 a) und (2 b).

Strichpunktiert (---) : Optimale Anpassung der Gl. (2 b) an (—), vgl. Text. Anpassungswerte:

a) $c_{ab}^0 = 2,38$; $M_q' = 0,137$ b) $c_{ab}^0 = 1,51$; $M_q' = 0,058$.

Gestrichelt (— — —) : Beste Anpassung der Gl. (2 a), Anpassungswerte:

a) $c_a = 2,26$; $M_q' = 0,140$ b) $c_a = 1,40$; $M_q' = 0,060$.

aberration zu bestimmen. Unter den vielen möglichen Anpassungen von Gl. (2 a) und (2 b) an die aus Worsters Rechnungen resultierende Funktion $\alpha'(\alpha)$ führte Gl. (2 b) zu den besten Ergebnissen, wenn c_a^0 so gewählt wird, daß die Maxima beider Kurven beim gleichen Abszissenwert α_1 auftreten und der Abbildungsmaßstab M_q' so gewählt wird, daß das Maximum die richtige Höhe hat. Das führt zu den Bedingungen

$$c_a^0 = \frac{1}{3 \sin^2 \alpha_1}, \quad (5)$$

wobei $\alpha' = \alpha'_{\max}$ für $\alpha = \alpha_1$ und

$$M_q' = \frac{2}{3} \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha'_{\max}} \sqrt{\frac{W_K}{W_A}}. \quad (6)$$

Die angepaßten Abbildungsmaßstäbe liegen dabei um 18% bzw. um 14% unter den Worsterschen Werten nach Tabelle 1. Für das System mit kegelförmiger Wehnelt-Elektrode ergibt sich nach der Gleichung (5) mit den Daten aus der Abbildung 2 b als Koeffizient der Winkelaberration der Wert $c_{ab}^0 = 2,38$. Er ist größer als der entsprechende Koeffizient für das System mit ebener Wehnelt-Elektrode, für den $c_{ab}^0 = 1,51$ ermittelt wurde. Die auf dem Sinussatz fußende Gl. (2 b) gibt den tatsächlichen Zusammenhang zwischen α und α' für große α genauer als die einfache Gl. (2 a) wieder. Die Verhältnisse liegen hier ähnlich, wie in I bei der Verwendung von Gl. (16) besprochen wurde.

d) Einfluß der Bildfehler auf die Strahlapertur

Wenn weder Öffnungsfehler noch Winkelaberration vorhanden sind, ist das Emittanz-Diagramm ein waagerechter Streifen, s. Abbildung 4 a. In diesem idealisierten Fall ist die Strahlapertur α_e' im Brennfleck unbeschränkt. Wenn nur ein Öffnungsfehler vorhanden ist, sind die Emittanz-Diagramme gekrümmt, s. Abbildung 4 b. In diesem Falle bestimmt der Öffnungsfehler die Strahlapertur α_e' . Diese Ge-

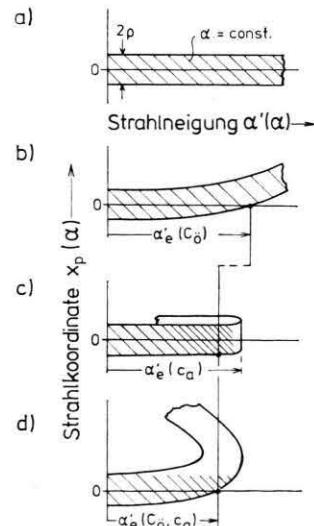


Abb. 4. Schematische Emittanz-Diagramme von Elektronenkanonen. a) ohne Bildfehler, b) mit Öffnungsfehler allein, c) mit Winkelaberration allein, d) mit Öffnungsfehler und Winkelaberration. Durch α_e' wird der größte Winkel bezeichnet, unter dem Strahlen vom Zentrum eines Brennflecks mit dem Durchmesser 2ρ ausgehen können.

gebenheiten für die Aperturbegrenzung liegen angenähert in Abb. 5 von I vor. Eine alleinige Winkelaberration würde nach Abb. 4 c das Emittanz-Diagramm in sich zurückknicken; jetzt würde der Abszissenwert a'_0 der Knickstelle die Strahlapertur im Brennfleck festlegen. Bei Vorhandensein beider Fehler entsteht ein Diagramm nach Abbildung 4 d. Hier gehen im allgemeinen beide Fehler in die Aperturbegrenzung ein. Insbesondere im Emittanz-Diagramm des Systems mit kegelförmiger Wehnelt-Elektrode, Abb. 2 b, c, bestimmt die Winkelaberration die Aperturbegrenzung in entscheidender Weise. Dieses Beispiel zeigt, daß in praktisch wichtigen Fällen die Diskussion der Strahlungscharakteristik von Elektronenkanonen nicht allein auf die Untersuchung des Öffnungsfehlers beschränkt werden darf.

4. Interpretation des den Emittanzdiagrammen zugrundeliegenden Strahlverlaufs

Die komplizierte Form der Emittanzdiagramme kann durch den Strahlengang in einem einfachen elektronenoptischen Modell für die Elektronenkanone erklärt werden. Hierzu greifen wir auf frühere Vorstellungen zurück und teilen das elektrische Feld der Elektronenkanone in ein Zentralfeld in Kathodennähe, das die Daten der Eintrittspupille festlegt, und ein anschließendes „Abbildungsfeld“ ein, das die Eintrittspupille in den Brennfleck abbildet. Mit diesem Modell konnte der generelle Verlauf von Brennfleckgröße und -lage in Abhängigkeit von der Wehnelt-Spannung einfach gedeutet werden⁹. Ordnet man dem Zentralfeld noch Winkel- und Queraberration sowie dem Abbildungsfeld eine Winkelaberration zu, dann kann mit diesem Modell auch der Verlauf von experimentell bestimmten Emittanz-Kurven qualitativ interpretiert werden¹⁰. Wir wollen im folgenden zeigen, daß dieses Modell sogar zu einer annähernd quantitativen Interpretation der Emittanz-Diagramme von Elektronenkanonen fähig ist, vgl. auch¹¹.

a) Ansatz

Wir betrachten in Abb. 5 die Tangenten der von der Kathode ausgehenden Hauptstrahlen. Sie legen Einfallsrichtung α'_0 und -höhe x_W der Hauptstrahlen in das Abbildungsfeld fest. Wir setzen an:

$$\alpha'_0 = \alpha - a \alpha^3; \quad (7)$$

$$x_W = \Delta x_q + (z_W - z_q) \alpha'_0. \quad (8)$$

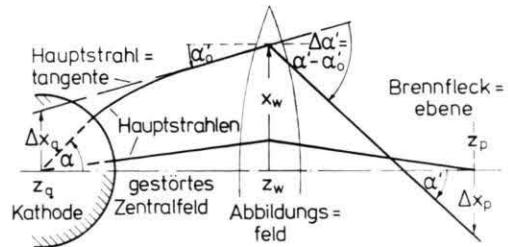


Abb. 5. Aufteilung der Kathodenlinse in ein „gestörtes Zentralfeld“ und ein „Abbildungsfeld“ gemäß l. c.⁹. Die in Normalrichtung zur Kathodenoberfläche emittierten Hauptstrahlen erleiden im gestörten Zentralfeld eine Winkelaberration $\alpha'_0 - \alpha$ und bezüglich des Kathodenmittelpunktes ($z_q, 0$) (= Mittelpunkt der Eintrittspupille) eine Queraberration Δx_q . Fehler des „Abbildungsfeldes“ werden pauschal durch überproportional zur Einfallshöhe x_W ansteigende Ablenkwinkel $\Delta \alpha' = \alpha' - \alpha'_0$ erfaßt.

Hierbei ist

$$\Delta x_q = b \alpha^3. \quad (9)$$

In diesen Gleichungen bedeuten $a > 0$ und $b > 0$ die Koeffizienten für Winkel- und Queraberration im gestörten Zentralfeld. Fehler des Abbildungsfeldes werden pauschal durch eine Winkelaberration in Form einer Strahlknickung $\Delta \alpha' = \alpha' - \alpha'_0$ berücksichtigt, die stärker als proportional zur Einfallshöhe x_W ansteigt

$$\Delta \alpha' = c(x_W + d x_W^3), \quad (10)$$

wobei $d > 0$. Der Koeffizient

$$c = \frac{1}{z_W - z_q} + \frac{1}{z_p - z_W} \quad (11)$$

ist bis auf einen hier nicht interessierenden Immersionsfaktor gleich der reziproken Brennweite des Abbildungsfeldes; $(z_q - z_W)$ und $(z_p - z_W)$ sind Gegenstands- und Bildweite. Für den Austrittswinkel $\alpha' = \alpha'_0 + \Delta \alpha'$ ergibt sich unter Berücksichtigung von (7) und (10) :

$$\alpha' = \alpha'_0 + \Delta \alpha' = \alpha - a \alpha^3 + c(x_W + d x_W^3). \quad (12)$$

Die Queraberration Δx_p in der Brennfleckebene z_p (in der Bildebene des Abbildungsfeldes) hat nach Abb. 5 die Größe

$$\Delta x_p = x_W + (z_p - z_W) \alpha'. \quad (13)$$

Durch Einsetzen von (8) sowie (7) und (9) in (12) läßt sich die Neigung α' der austretenden Strahlen durch die kathodenseitige Strahlneigung α ausdrücken; ebenso die Queraberration Δx_p nach (13), indem man hierin α' durch die erweiterte Gl. (12) sowie x_W durch (8), (7) und (9) auf die Neigung α

zurückführt. Ordnet man noch die rechten Seiten von (12) und (13) nach steigenden Potenzen von a , so erhält man für die gesuchten Größen a' und Δx_p Polynome neunten Grades in a von der Form

$$a' = A_1 a + A_3 a^3 + A_5 a^5 + \dots; \quad (12 \text{ a})$$

$$\Delta x_p = B_3 a^3 + B_5 a^5 + \dots \quad (13 \text{ a})$$

Diese Darstellungsform von a' und Δx_p ist selbstverständlich unabhängig vom benutzten Modell. Das Modell ermöglicht es aber, die Entwicklungskoeffizienten anschaulich zu interpretieren. Für die untersuchten Fälle reicht es aus, die letzten Gleichungen nur bis zum Glied fünfter Ordnung zu berücksichtigen.

Ein lineares Glied mit $B_1 \neq 0$ tritt in (13 a) nicht auf, da Δx_p in der Gaußschen Bildebene liegt. Die Koeffizienten A_i und B_i sind Funktionen von $(z_q - z_W)$, $(z_p - z_W)$, a , b und d . Unter Benutzung der Abkürzungen $z = d/(z_q - z_W)$ und $z' = d/(z_p - z_W)$ erhalten sie die Form:

$$A_1 = \frac{z}{z'}; \quad \text{wobei} \quad z = \frac{z'}{M_a'} \sqrt{\frac{W_K}{W_A}}. \quad (14)$$

Der Koeffizient A_1 ist also allein durch die Gaußsche Dioptrik bestimmt. Weiter gilt:

$$A_3 = -\frac{1}{z'} \left\{ d(z' - z)z^2 - \frac{z'}{z} b + b + a z \right\}; \quad (15 \text{ a})$$

$$B_3 = -\left\{ d(z' - z)z^2 - \frac{z'}{z} b \right\}; \quad (15 \text{ b})$$

$$A_5 = 3d(b + az)(z' - z) \frac{z}{z'}; \quad (16 \text{ a})$$

$$B_5 = 3d(b + az)(z' - z)z. \quad (16 \text{ b})$$

In die Koeffizienten A_3 , A_5 und B_5 gehen alle drei der für das Modell angesetzten Fehlerkoeffizienten a , b und d ein. Lediglich der Koeffizient B_3 für die Queraberration Δx_p ist nach (15 b) unabhängig vom Koeffizienten a für die Winkelaberration im gestörten Zentralfeld. Wenn man (7), (9) und (10) durch Koeffizienten fünfter Ordnung ergänzt, ändern sich A_1 , A_3 und B_3 nicht, wohl aber A_5 und B_5 . Die ersten drei genannten Koeffizienten werden also durch das Modell vollständig erklärt, die beiden letzten nur unter der Voraussetzung, daß die Fehler fünfter Ordnung für das Zentralfeld allein und für das Abbildungsfeld allein vernachlässigbar sind.

Durch passende Wahl des Koeffizientensatzes (14) bis (16) ist es möglich, den Verlauf aller praktisch

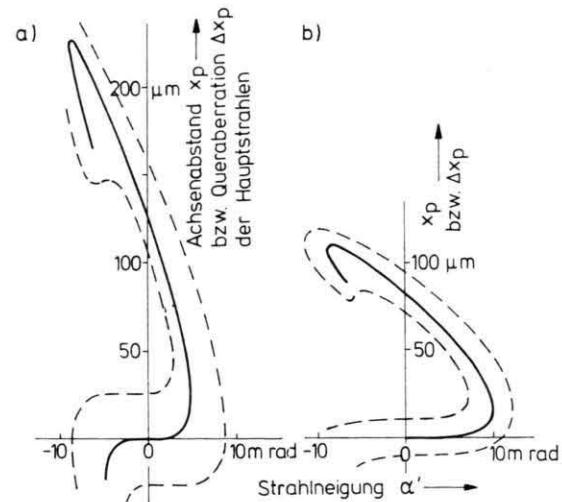


Abb. 6. Adaption des Verlaufs der gemessenen Emittanz-Diagramme durch das Modell der Kathodenlinse.

(---) : gemessene Emittanz-Diagramme von Abb. 2 c.
 (—) : aus (12 a), (13 a) folgende Emittanz-Kurven der Hauptstrahlen. Diese Kurven wurden durch geeignete Wahl der Koeffizienten A_i , B_i an die gemessenen relativen Extremwerte des Austrittswinkels α' und der Queraberration Δx_p angepaßt.

Die angepaßten Koeffizienten in (12 a) und (13 a) haben folgende Werte:

a) kegelförmige Wehnelt-Elektrode	b) ebene Wehnelt-Elektrode
$A_1 = 1,68 \cdot 10^{-2}$	$A_1 = 3,51 \cdot 10^{-2}$
$A_3 = -2,30 \cdot 10^{-2}$	$A_3 = -6,29 \cdot 10^{-2}$
$A_5 = 5,54 \cdot 10^{-3}$	$A_5 = 2,30 \cdot 10^{-2}$
$B_3 = 1,98 \cdot 10^{-1} \text{ mm}$	$B_3 = 1,97 \cdot 10^{-1} \text{ mm}$
$B_5 = -5,74 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$	$B_5 = -9,15 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$

Diesen Werten entsprechen nach (14) bis (16) folgende Bestimmungsgrößen im Modell-Ansatz:

$z = -1,74 \cdot 10^{-1} \text{ mm}$	$z = -1,40 \cdot 10^{-1} \text{ mm}$
$z' = -10,35 \text{ mm}$	$z' = -3,98 \text{ mm}$
(d. h. $M_{q'} = +0,136$)	(d. h. $M_{q'} = +0,065$)
$a = 2,42 \cdot 10^{-1}$	$a = 4,15 \cdot 10^{-1}$
$b = 1,94 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$	$b = 4,12 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$
$d = 2,70 \cdot 10^{-1} \text{ mm}^{-2}$	$d = 1,05 \text{ mm}^{-2}$

vorkommenden Emittanz-Diagramme in ihren charakteristischen Merkmalen anzunähern.

b) Anwendungsbeispiele

In Abb. 6 sind in die gemessenen Emittanz-Diagramme von Abb. 2 c die aus den Gln. (12 a) und (13 a) berechneten Emittanz-Kurven der Hauptstrahlen eingezeichnet. Die zur Anpassung führenden Koeffizienten A_i , B_i sowie deren Bestimmungsgrößen nach (14) bis (16) sind in der Abbildungsunterschrift angegeben. B_3 läßt sich durch Vergleich von (1) und (13 a) sofort auf die Öffnungsfehlerkonstante C_0 zurückführen:

$$C_0 = B_3 / M_{q'}'. \quad (17)$$

In ähnlicher Weise läßt sich durch Vergleich von (2 a) und (12 a) der Koeffizient A_3 auf die Winkelaberration zurückführen:

$$c_a = -A_3 M_q' \sqrt{W_A/W_K} = -A_3/A_1. \quad (18)$$

Die aus den angepaßten Kurven folgenden Zahlenwerte für die beiden Fehlerkoeffizienten sind: $C_{\ddot{o}c} = 1,46$ mm und $c_{ac} = 1,37$ für das System mit kegelförmiger Wehnelt-Elektrode und $C_{\ddot{o}c} = 3,02$ mm und $c_{ac} = 1,79$ für das System mit ebener Wehnelt-Elektrode. Als Abbildungsmaßstäbe M_q' wurden in (17) und (18) die Meßwerte aus Tab. 1 eingesetzt.

Beim Vergleich dieser $C_{\ddot{o}c}$ - und c_{ac} -Werte mit den in Kapitel 3 b, c angegebenen Werten ist folgendes zu beachten: Die früheren Werte wurden direkt aus den Worsterschen Diagrammen von Abb. 2 b ermittelt, die oben angegebenen Werte ergaben sich dagegen aus der Potenzreihen-Entwicklung der von uns gemessenen Emittanz-Diagramme von Abbildung 2 c. Die Tatsache, daß die Anpassung der experimentellen Kurve an die in⁶ berechnete im oberen Teil von Abb. 2 weniger gut gelungen ist als im unteren Teil dieser Abbildung, macht es verständlich, daß die in diesem Kapitel angegebenen Fehlerkonstanten für das System mit kegelförmiger Wehnelt-Elektrode weniger gut mit den früheren Angaben übereinstimmen als für das System mit ebener Wehnelt-Elektrode.

Wir haben auch die von Worster berechneten Diagramme von Abb. 2 b im obigen Sinne approximiert. Auch in diesem Fall wird die Hauptaussage von Kap. 3 b, c bestätigt: kleinere Öffnungsfehlerkonstante $C_{\ddot{o}}$ und größere Konstante der Winkel-

aberration c_a für die kegelförmige Wehnelt-Elektrode. Für die Beträge der aus der Parameterdarstellung folgenden $C_{\ddot{o}}$ - und c_a -Werte ergaben sich allerdings im Mittel um 30% kleinere Werte als in Kapitel 3 b, c.

Die Form der gemessenen Emittanz-Diagramme wird sicher nicht nur durch die Elektrodenkonfiguration der Elektronenkanone, sondern auch durch die in Kathodennähe auftretende Raumladung beeinflußt. Die berechneten Emittanz-Kurven gründen sich nach (12 a) bis (16) auf Potenzreihenentwicklungen fünfter Ordnung von Strahlneigung α' und Queraberration Δx_p nach dem Eintrittswinkel α . Aus der Tatsache, daß gemessene und berechnete Diagramme in ihrem gesamten Verlauf gut übereinstimmen, können wir folgenden Schluß ziehen: In den untersuchten Fällen übt die Raumladung keinen Einfluß von höherer als fünfter Potenz in α aus; mit anderen Worten, die Wirkung der Raumladung wird durch die Fehlerterme a , b , d nach (7) bis (10) hinreichend erfaßt.

Es ist das Ziel zukünftiger Untersuchungen, diese Koeffizienten in geeigneter Form als Funktion der Wehnelt-Spannung darzustellen und auf diese Weise auch den Einfluß der Wehnelt-Spannung auf den außeraxialen Strahlengang zu interpretieren.

Herrn Professor Hanßen danke ich für die Anregung zur Durchführung der Rechnungen nach den Ansätzen (7) bis (13) und für die Durchsicht des Manuskriptes.

¹ R. Lauer, Z. Naturforsch. **28 a**, 1937 [1973].

² K.-J. Hanßen, Z. Naturforsch. **19 a**, 896 [1964].

³ K.-J. Hanßen u. R. Lauer, in "Focusing of Charged Particles" by A. Septier, New York u. London 1967, dort S. 259 und 265.

⁴ A. P. Banford, The Transport of Charged Particle Beams, London 1966, S. 10 ff.

⁵ K.-J. Hanßen, G. Ade u. R. Lauer, Optik **35**, 567 [1972].

⁶ J. Worster, Int. J. Electronics **28**, 117 [1970].

⁷ Z. Popovic, J. Sci. Jinstr. **42**, 261 [1965].

⁸ A. Oshita, H. Shimoyama u. S. Maruse, J. Electr. Microscopy **20**, 281 [1971].

⁹ R. Lauer, Z. Naturforsch. **23 a**, 100 [1968].

¹⁰ K.-J. Hanßen u. R. Lauer, Z. Naturforsch. **24 a**, 97 [1969].

¹¹ R. Lauer and K.-J. Hanßen, Elektron Microscopy 1974, 8th Intern. Congress held in Canberra, Bd. I, Seite 126.